01 Ex 2 : 1) Note : **3.5** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ 2.0☐ 2.5☐ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

Exercice 2 :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ tq $f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$

1) La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est : $(1, X, X^2)$

$$\text{Donc, } \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}_2[X]_{can}}(f) = \begin{array}{ccc|c} f(1) & f(X) & f(X^2) & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & X^2 \end{array}$$

$f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$

$f(X) = X + 2 + X - 2X - 2 = 0$

$f(X^2) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2$

$= X^2 + 2X + 4 + X^2 - 2X^2 - 2X - 2$ ☐

$= 2$

Attention au développement des carrés : $(X+2)^2 = X^2$☐ $4X+4$ et $-2(X+1)^2 = -2X^2-4X-2$. Les deux erreurs de calcul se compensent par chance.

1/7

01 Ex 2 : 2) Note : **4.0** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ 2.0☐ 2.5☐ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

2) On cherche une base B de $\mathbb{R}_2[X]$ tq $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Posons $B = (e_1, e_2, e_3)$

On veut $f(e_1) = 0$ $f(e_2) = e_3$ $f(e_3) = 0$

Prenons $e_3 = 1$

donc $f(e_2) = 1$

D'après la question précédente, $f(X^2) = 2$ donc $\frac{1}{2} f(X^2) = 1$ donc $f(\frac{X^2}{2}) = 1$

d'où $e_2 = \frac{1}{2} X^2$

Enfin, on veut $f(e_1) = 0$ donc $e_1 \in \mathrm{Ker} f$

Mais, $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(1, X)$

On prend donc $e_1 = X$ car si on prenait $e_1 = 1$, la famille ne serait pas libre

d'où, $B = (X, \frac{1}{2} X^2, 1)$

Exercice 3 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

---

02 Ex 2 : 1) Note : **1.5** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ 2.0☐ 2.5☐ ☒ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ tq $f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$.

$$1) \quad A = \mathrm{Mat}_{B_{can}}(f) = \begin{array}{ccc|c} f(1) & f(X) & f(X^2) & \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & X \\ 0 & 0 & 0 & X^2 \end{array}$$

$f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$ ☐

$f(X) = X + 2 + X + 2X + 2$

$= 4X + 4$

$f(X^2) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2$

$= X^2 + 2X$☐$+ 4 + X^2 - 2X^2 - 4X - 2$

$= -2X + 2$

Erreur de signe dans le calcul de $f(X)$: le term☐ $-2P(X+1)$ a été remplacé par $+2(X+1)$, ce qui fausse le résultat.

Erreur dans le développement de $(X+2)^2$ qui est égal☐ X^2+4X+4 et non X^2+2X+4, menant à une valeur erronée pour $f(X^2)$.

02 Ex 2 : 2) Note : **1.0** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ ☒ 2.0☐ 2.5☐ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

Les conditions initiales posées sur les vecteurs de la base sont just☐

$= -2X + 2$

2) On cherche une base de $\mathbb{R}_2[X]$ de vecteurs (e_1, e_2, e_3) tq $e_1, e_2, e_3 \neq 0$ tq $f(e_2) = e_3$ et $e_1, e_3 \in \mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\, e_3$

~~On prend alors e_1, e_2, e_3 de tel vecteur et on veut mq la famille est libre~~

~~On cherche $\mathrm{Ker} A$. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 2z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$~~

~~Donc $2y = z$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_2$, $e_3, e_4 \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$~~

~~on prend $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 2y \end{pmatrix}$ et $e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car les 2 vecteurs sont libres~~

??Non

soit $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\, e_3$ donc $A e_3 = \lambda e_3$ ☒ $\Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 2z = \lambda x \\ 4y - 2z = \lambda y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 2z = \lambda x \\ y(4 - \lambda) = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(8 - \lambda) = \lambda x \\ y(4 - \lambda) = 2z. \end{cases}$

pour $\lambda \neq 4, 8, 0$ $e_3 = \begin{pmatrix} \frac{y(8-\lambda)}{\lambda} \\ y \\ \frac{y(4-\lambda)}{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \frac{8-\lambda}{\lambda} \\ 1 \\ \frac{4-\lambda}{2} \end{pmatrix}$

On prend $e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et e_1, e_2 deux vecteurs $\in \mathrm{Ker} f$ tq $e_1 \neq \mu e_2$. $\forall \mu \in \mathbb{R}$. ☐

$\rightarrow e_3 = 3 + X + X^2$ comme $\dim \mathrm{Im} f = 1$ d'après le thm du rang $\dim \mathrm{Ker}$

L'égalité $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(e_3)$ ne signifie pas qu'il faut cherch☒ un vecteur propre avec une valeur propre λ quelconque. Étant donné que $e_3 \in \ker f$, on a directement $f(e_3) = 0$, soit $Ae_3 = 0$.

Vous cherchez ensuite e_1 et e_2 dans $\ker f$. Or si e_2☐ $\ker f$, alors $f(e_2) = 0$, ce qui contredit directement votre condition de départ $f(e_2) = e_3 \neq 0$.

Exercice 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

---

03 Ex 2 : 1) Note : **3.0** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ 2.0☐ 2.5☐ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

Exercice 2 :

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ $f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$

$B = B_{can}(\mathbb{R}_2[X]) = (1, X, X^2)$

1.

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{array}{ccc|c} f(1) & f(X) & f(X^2) & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & X \\ 0 & 0 & 0 & X^2 \end{array}$$

$f(1) = 0$

$f(X) = X + 2 + X - 2(X+1)$

$= 0$

$f(X^2) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2$

$= X^2 + 2X + 4 + X^2 - 2X^2 - 4X - 2$ ☐

$= -2X + 2$

Petite erreur de calcul ici : le développement de $(X$☐ $2)^2$ est X^2+4X+4 et non X^2+2X+4. Le reste du raisonnement (la méthode pour trouver la matrice) est tout à fait correct.

03 Ex 2 : 2) Note : **1.5** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ 2.0☐ 2.5☐ ☒ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

2. On cherche $B = (e_1, e_2, e_3)$ tq

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{array}{ccc|c} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & \\ 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 1 & 0 & e_3 \end{array}$$

Alors $f(e_1) = 0$ $f(e_3) = 0$ $f(e_2) = e_3$

Comme $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(e_3)$

$f(e_1)$ ~~et~~ $f(e_3) \in \mathrm{Vect}(e_3)$

On a $f(e_2) \in \mathrm{Vect}(e_3)$

Donc $e_3 \in \mathrm{Vect}(e_3)$

Comme $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(e_3)$, Alors quelque soit e_1, e_2

On aura des 0 sur les deux premières lignes.

On prend ~~pour~~ $e_2 =$ n'importe quelle pol de $\mathbb{R}_2[X] \neq 1$ et X.

NON ; il faut que $f(e_2) \neq \vec{0}$

On pose $e_3 = f(e_2)$ et $e_1 = 1$ ☐

Alors $f(e_1) = 0$ ✓

Vous ne donnez pas de base explicite à la fin. De pl☐ votre proposition de construction de la base ne fonctionne pas : comme l'image de f est engendrée par les polynômes constants, $e_3 = f(e_2)$ sera une constante. Ainsi, en posant $e_1 = 1$, les vecteurs e_1 et e_3 seront colinéaires et la famille (e_1, e_2, e_3) ne sera pas libre.

Exercice 3 :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

---

04 Ex 2 : 1) Note : **4.0** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ 2.0☐ 2.5☐ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

Ex 2 : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ $B_{can}(\mathbb{R}_2[X]) = (1, X, X^2)$

1) ① $P(X) = 1$

$f(P) = 1 + 1 - 2 = 0$

② $P(X) = X$

$f(P) = X + 2 + X - 2(X+1)$

$= 0$

③ $P(X) = X^2$

$f(P) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2$

$= X^2 + 4X + 4 + X^2 - 2X^2 - 4X - 2$

$= 2$

Donc $\mathrm{Mat}_{B_{can}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

04 Ex 2 : 2) Note : **1.5** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ 2.0☐ ☒ 2.5☐ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

2) On veut $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Donc $f(e_2) = e_3$ $f(e_1) = 0$ $f(e_3) = 0$

$B = (e_1, e_2, e_3)$

Donc $e_1, e_3 \in \mathrm{Ker} f$.

$f(e_2) = e_3 \in \mathrm{Im} f$.

Donc $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\, e_3$ $e_3 \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$.

or $f^2(e_2) = 0$

Soit $e_3 = X$ ☐ $f(e_3) = 0$ Ok.

$e_1 = 1$ $f(e_1) = 0$ Ok e_2 tq $f(e_2) = X$. ☐

Le vecteur e_3 doit appartenir à $\mathrm{Im} f$. D'après la premiè☐ question, $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(1)$, donc le polynôme X ne convient pas (il est seulement dans $\ker f$).

Puisque $X \notin \mathrm{Im} f$, l'équation $f(e_2) = X$ n'a pas de s☐ lution. Il fallait par exemple choisir $e_3 = 2$ pour pouvoir trouver $e_2 = X^2$.

---

05 Ex 2 : 1) Note : **4.0** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ 2.0☐ 2.5☐ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

Ex 2 :

1) $B_{can} = (1, X, X^2)$

$\mathrm{Mat}_{B_{can}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

05 Ex 2 : 2) Note : **1.5** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ 2.0☐ 2.5☐ ☒ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

Vous avez compris les conditions que doivent vérifier les vecteurs de la base, et votre construction théorique est correcte. Cependant, il fallait appliquer ce☐ méthode à l'endomorphisme f de l'énoncé et donner explicitement les trois polynômes e_1, e_2, e_3 qui forment cette base.

2) On cherche $B = (e_1, e_2, e_3)$ tel que $\begin{cases} f(e_1) = 0 \\ f(e_2) = e_3 \\ f(e_3) = 0 \end{cases}$

On a $\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}\, e_3$, alors $\mathrm{rg} f = 1$.

D'après le théorème du rang, $\dim \ker f = 2$

on choisit n'importe quel $e_1 \neq \vec{0}$, $e_3 \neq \vec{0}$ et $e_1 \neq e_3$ tels que $e_1, e_3 \in \ker f$. On a alors $f(e_1) = 0$ et $f(e_3) = 0$. On choisit $e_2 \neq \vec{0}$ de sorte que $f(e_2) = e_3$

est-ce possible ?

e_1, e_3 non colin.

(e_1, e_2) est une base car sinon il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $e_1 = \lambda e_2$.

Alors $f(e_1) = \lambda f(e_2) = 0$, or $f(e_2) = e_3$ et $e_3 \neq \vec{0}$

donc $\lambda = 0$. Donc (e_1, e_2) est une base.

$\mathrm{vect}(e_1, e_2) \oplus \mathrm{vect}(e_3)$ car :

soit $x \in \mathrm{vect}(e_1, e_2) \oplus \mathrm{vect}(e_3)$, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda_3 e_3$

$\Leftrightarrow \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) = \lambda_3 f(e_3)$

$\Leftrightarrow \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) = 0$

or $(f(e_1), f(e_2))$ est une base donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

donc $x = 0$

D'où (e_1, e_2, e_3) une base qui convient

Ex 3 :

---

06 Ex 2 : 1) Note : **4.0** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ 2.0☐ 2.5☐ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1} (AB)_{ii} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1} \sum_{i=1} b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1} (BA)_{jj} = \mathrm{Tr}(BA)$.

Ex 2 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ tq $f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$.

1. $f(1) = 0$, $f(X) = X + 2 + X - 2X - 2 = 0$, $f(X^2) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2$
$= X^2 + 4X + 4 + X^2 - 2X^2 - 4X - 2$.
$= 2$.

$$\mathrm{Mat}_{B_{can}}(f) = \begin{array}{ccc|c} f(1) & f(X) & f(X^2) & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & X^2 \end{array}$$

06 Ex 2 : 2) Note : **2.5** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ 2.0☐ 2.5☐ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

La méthode est tout à fait correcte, mais vous n'avez pas donné d'exemple explicite de base (en précisant des polynômes pour e_1, e_2, e☐

2. On cherche une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ tq $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = 0$.
Dans la base canonique, la matrice de f est nilpotente d'indice 2, donc $f^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])}$, donc $\mathrm{Ker} f \supset \mathrm{Im} f$.
et $\dim \mathrm{Ker} f \geqslant 2$ donc $= 2$ par définition (application non nulle).
Par thm du rang $\mathrm{rg} f = 1$.
On prend (e_1, e_3) une base de $\mathrm{Ker} f$, et e_2 qqc tq $f(e_2) = e_3$
(e_1, e_2, e_3) est libre, si on avait $f(e_2) = \lambda e_2$ alors comme $f^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])}$, $f(e_2) = 0$
or $e_2 \notin \mathrm{Ker} f$ donc impossible, c'est une base.

il faut $e_3 \in \mathrm{Im} f$

$\hookrightarrow$ existence ?

Ex 3 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

---

07 Ex 2 : 1) Note : **4.0** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ 2.0☐ 2.5☐ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

Ex n° 2 :

1.

$$\mathrm{Mat}_{B_{can}}(f) = \begin{array}{ccc|c} f(1) & f(X) & f(X^2) & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & X^2 \end{array}$$

07 Ex 2 : 2) Note : **1.0** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ ☒ 2.0☐ 2.5☐ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

Il faut donner explicitement les polynômes (e_1, e_2, e_3) qui forment la base de $\mathbb{R}_2[X]$. Le polynôme e_2 n'a pas été détermi☐

2. on cherche une base $(e_1, e_2, e_3) = B$ tq $f(e_2) = e_3$, $e_1, e_3 \in \mathrm{Ker} f$ avec et $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Vect}\, e_3 = \{\lambda e_3, \lambda \in \mathbb{R}\}$

~~on pose $e_3 \neq \vec{0}$ on a de plus $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Vect}\, e_3$~~
~~$\Rightarrow f(e_1) = \lambda e_3 = \vec{0}$ car $e_1 \in \mathrm{Ker} f$.~~
~~de plus, $e_3 \neq \vec{0}$ d'où $\lambda = 0$~~

~~$e_3 \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow e_3 \in \mathrm{Vect}(1, X)$~~
~~de plus $e_3 \in \mathrm{Im} f \Rightarrow e_3 \in \mathrm{Vect}(1)$~~
~~D'où e_3 de la forme $\lambda_3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$~~

on pose $e_3 \neq \vec{0}$ $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Vect}\, e_3$
d'après la matrice $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
et $\dim \mathrm{Vect}\, e_3 = \dim \mathrm{Im} f = 1$
D'où $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\, e_3$.
Ainsi $f(e_1) = 0 \times e_3 = \vec{0}$ car $e_1 \in \mathrm{Ker} f$.

Or $e_3 \in \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Vect}(1)$
Donc $e_3 = \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

~~on a bien $f(e_3) = \lambda_3 + \lambda_3 - 2\lambda_3 = \vec{0}$~~ ☐
on choisit B_1 une base de $\mathrm{Ker} f$ tq $B_1 = (e_1, e_2)$
et $B_2 = (e_3)$ une base de $\mathrm{Im} f$.
Ainsi la base $B = (e_1, e_2, e_3)$ convient.

Vous indiquez que (e_1, e_2) est une base de $\ker f$, ce q☐ implique $f(e_2) = 0$. Or, d'après la matrice voulue, on doit avoir $f(e_2) = e_3 \neq 0$.

Ex n° 3 :

---

08 Ex 2 : 1) Note : **4.0** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ 2.0☐ 2.5☐ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

1. $f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$

$f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$

$f(X) = X + 2 + X - 2(X+1) = 0$

$f(X^2) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2 = X^2 + 4X + 4 + X^2 - 2X^2 - 4X - 2 = 2$

$$\mathrm{Mat}_{B_{can}}(f) = \begin{array}{ccc|c} f(1) & f(X) & f(X^2) & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & X^2 \end{array}$$

08 Ex 2 : 2) Note : **1.5** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ 2.0☐ 2.5☐ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

2. $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\, e_3$

on cherche une base B tq $\begin{cases} f(e_1) = \vec{0} \\ f(e_2) = e_3 \\ f(e_3) = \vec{0} \end{cases}$

On prend un vecteur e_1 non nul et on pose ☐

La traduction de la matrice en un système de conditio☐ sur les images des vecteurs de base est tout à fait correcte. Néanmoins, vous vous êtes arrêté en cours de route. Il fallait utiliser l'expression de f (ou la matrice trouvée à la question 1) pour identifier concrètement des polynômes satisfaisant ces conditions, par exemple en choisissant $e_2 = X^2$.

Exercice 3

---

09 Ex 2 : 1) Note : **4.0** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ 2.0☐ 2.5☐ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

1. $f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$

Base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$: $(1, X, X^2)$

- $f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$
- $f(X) = X + 2 + X - 2(X+1) = 0$
- $f(X^2) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2 = X^2 + 4X + 4 + X^2 - 2(X^2 + 2X + 1)$
$= 2X^2 - 2X^2 + 4X - 4X + 4 - 2 = 2$

$\mathrm{Mat}_{B_{can}(\mathbb{R}_2[X])}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

09 Ex 2 : 2) Note : **1** 0.0☐ 0.5☐ 1.0☐ 1.5☐ ☒ 2.0☐ 2.5☐ 3.0☐ 3.5☐ 4.0☐ 4.5☐ clr☐

Il est demandé de déterminer explicitement les polynômes de la base, et non seulement de montrer qu'elle exis☐

2. On cherche $B = (e_1, e_2, e_3)$ tel que $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- On prend (e_1, e_3) une base de $\mathrm{Ker} f$ qui existe car $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\, e_3$ donc $\dim \mathrm{Ker} f = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \mathrm{rg} = 3 - 1 = 2$.
- On pose $f(e_2) =$☐ donc $X \in \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\, e_3$ donc $X \in \mathrm{Vect}\, e_3$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $X = \lambda e_3$, on prend $\lambda = 1$ alors $f(e_2) = e_3$ ce qui est possible car $e_2 \notin \mathrm{Ker} f$.

La famille (e_1, e_2, e_3) est alors libre car $e_2 \notin \mathrm{Ker} f$ et de même dimension que $\mathbb{R}_2[X]$. Donc cette base fonctionne.

D'après la question précédente, l'image de f est constitu☐ de constantes (par exemple $f(X^2) = 2$). On a donc $X \notin \mathrm{Im} f$, vous ne pouvez pas faire cette supposition.

Exercice 3 :